Analyse 3 - Série TD 1

Exercice 1 :

a) calculer la somme des séries suivantes :

$$1.\ \ u_n = \frac{2}{n^2+2n}, \qquad (n \geq 1) \qquad 2.\ \ u_n = \frac{e^n(e-1)}{e^{2n+1}}, \quad (n \geq 0)$$

b) Montrer que la série de terme général : $v_n = \ln\frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}$, $(n \geq 0)$ est divergente.

Exercice 2 :

Étudier les séries de terme général suivant :

$$\textbf{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{2+\sin n}{3^n}, \quad \textbf{b)} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \textbf{c)} \sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad \textbf{d)} \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

$$\textbf{e)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}, \quad \textbf{f)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha + \ln n}, \text{où } \alpha > 0 \quad \textbf{g)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}, \quad \textbf{h)} \sum_{n\geq 1} n^3 e^{-n}$$

En déduire : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{lnn}}{(lnn)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

Exercice 3 :

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $v_n = n^{1,01}u_n$ est bornée.

Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs, et soit $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 5 :

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\cos n)^2}, \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\sin\frac{1}{n^2}\right) \quad 3) \sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad 4) \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{-2^n}{3^{n-2}}.$$

Analyse 3 - Série TD 1

Exercice 6 :

Etudier la convergence et la convergence absolue des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \quad , \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n)^{\frac{2}{3}}} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

Exercice 7

Considérons les séries numériques suivantes :

$$\mathbf{a)}\ \sum_{n\geq 1}\frac{2+\cos\sqrt{n}}{n}\ , \quad \mathbf{b)}\ \sum_{n\geq 1}\frac{2-\cos n\sin n}{n^2+4}\ , \quad \mathbf{c)}\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Sont-elles absolument convergentes ? Sont-elles convergentes ?

Exercice 8

Pour quelles valeurs de $a \in IR$, la série de terme général :

$$u_n = (-1)^n\frac{e^{an}}{n}\ , \qquad (n \geq 1)$$

Est-elle convergente ? Absolument convergente ? Divergente ?